

C. Giorgi

ISEF Roma - Cattedra di Biomeccanica

Misura delle resistenze passive nel pattinaggio a rotelle - corsa

La letteratura sportiva non fornisce dati di natura fisica e biomeccanica sul pattinaggio a rotelle - corsa. Questa specialità sportiva ha visto accelerare la propria evoluzione soprattutto negli ultimi anni, da quando c'è stato il passaggio dal *pattino tradizionale* (a quattro ruote disposte a rettangolo) a quello *in linea* (quattro o cinque ruote sottili disposte in fila). La pratica di gara ha mostrato un consistente aumento delle velocità, ma tutta l'evoluzione sembra basarsi solo su sperimentazioni "di campo".

In questo studio si vuole prendere in considerazione l'entità delle resistenze passive, determinandone il valore per via indiretta. Verranno svolte alcune considerazioni teoriche sui due fenomeni (resistenza aerodinamica e attrito volvente), cui riferire alcune misure sperimentali svolte recentemente (maggio 1997) con atleti della Nazionale Italiana seniores.

Espressioni matematiche delle resistenze passive

La **resistenza aerodinamica** rappresenta il termine principale nelle resistenze passive. Nel campo delle velocità di gara (circa 40 Km/h, ovvero circa 10 m/s) può essere ritenuta sufficientemente approssimata la formula {1, pag. 412}:

$$F_a = \rho c_x S v^2 \quad [1]$$

in cui:

F_a	[N]	Resistenza aerodinamica
ρ	[Kg/m ³]	densità del mezzo
c_x	[-]	coefficiente aerodinamico
S	[m ²]	superficie maestra
v	[m/s]	velocità di avanzamento

La densità del mezzo ρ , posto di trovarsi in condizioni atmosferiche note, può essere determinata dall'equazione dei gas perfetti {2, pag. 527}:

$$p V = n R T \quad [2]$$

in cui:

p	[hPa]	Pressione
V	[m ³]	volume
n	[kmoli]	numero di moli
R	[m ³ hPa / (°K kmole)]	costante dei gas
T	[°K]	temperatura in gradi Kelvin = temperatura in gradi centigradi + 273

L'equazione [2] può essere riadattata in forma più utile tenendo conto che, per una massa m [Kg] di gas di peso molecolare M [Kg/kmole], per definizione si ha:

$$\rho = m / V$$

$$n = m / M$$

Sostituendo, si ottiene:

$$\rho = (p M) / (R T) \quad [2']$$

Le costanti utilizzate in questa equazione valgono:

M	29 Kg/kmole (valido per aria)
R	83 m ³ hPa / (°K kmole) {3, pag. 1-31}

In particolare, nelle condizioni in cui sono state svolte le prove (livello del mare, pressione 1015 hPa, temperatura 25°), si è utilizzato per ρ il valore di 1.20 Kg/m³.

Per applicare la formula [1] occorre conoscere i due parametri c_x e S , dei quali non sono disponibili né misure dirette, né stime supportate da esperienze.

Bisogna dire che né l'uno né l'altro di questi termini sono costanti nel corso dell'esecuzione del passo-spinta (in rettilineo) o del passo incrociato (curva), perché la postura dell'atleta muta in continuazione. Di conseguenza ci si deve accontentare di avere una valutazione semi-quantitativa, che possa tuttavia dare informazioni sufficienti sulla *media* del fenomeno.

In appendice (relazione [10]) verrà mostrato che è possibile calcolare il valore di S con sufficiente approssimazione (circa 9%) semplicemente partendo dalla conoscenza della statura h [m] e dalla massa m [Kg] del soggetto. Pertanto, dell'equazione [1] solo il termine c_x è incognito.

Il secondo termine delle resistenze passive è costituito dall'**attrito volvente**. La formulazione solitamente utilizzata è la seguente {1, pag. 372}:

$$F_v = k_v P / r = k_v m g / r \quad [3]$$

in cui:

F_v	[N]	Attrito volvente
k_v	[m]	coefficiente di attrito volvente
P	[N]	peso del soggetto
r	[m]	raggio della ruota
m	[Kg]	massa del soggetto
g	[m/s ²]	accelerazione di gravità = 9.81 m/s ²

Tuttavia, si è preferito utilizzare una formulazione diversa, grazie alla quale i successivi passaggi matematici fossero più agevoli. L'ipotesi addizionale è che la forza di attrito sia linearmente dipendente dalla velocità di avanzamento v [m/s]:

$$F_v = k'_v m g v \quad [3']$$

L'errore così introdotto può essere tollerato, almeno nei limiti già indicati a proposito della resistenza aerodinamica e considerando di utilizzare la formula in un intorno di velocità prossimo a quello delle misure. In altre parole, avendo utilizzato misure di velocità comprese tra circa 4 e 9 m/s, non è opportuno usare le relazioni proposte troppo al di fuori di questo intervallo.

Nella formula [3'] il nuovo coefficiente k'_v ha le dimensioni di un inverso di una velocità [s/m]. Nel seguito si preferisce conglobare in esso la costante g , per cui si propone l'espressione definitiva:

$$F_v = k m v \quad [4]$$

in cui k ha le dimensioni dell'inverso di un tempo [1/s].

Il coefficiente k , pur avendo introdotto le ipotesi di cui sopra, mantiene il significato di un coefficiente di attrito, mettendo in relazione il carico applicato sulle ruote con la resistenza passiva. Nei casi concreti, gli atleti fanno utilizzo di ruote diverse a seconda del tipo di percorso su cui gareggiano: pista o strada, liscio o ruvido, aperto o chiuso, ecc. Pertanto, si deve presumere che ci sia un valore di k diverso per ciascuna delle situazioni. Il raggio r delle ruote impiegate correntemente in gara è di circa 0.041 m.

Equazione del rallentamento

Supponiamo di effettuare una prova nella quale un atleta, lanciato alla velocità v_0 [m/s], smetta di spingere e, rimanendo in posizione di pattinaggio, si lasci rallentare dall'azione combinata della resistenza aerodinamica e dell'attrito volvente.

Questo fenomeno è regolato dalla legge di Newton:

$$\Sigma F(t) = m a(t) \quad [5]$$

in cui a , accelerazione [m/s²], e ΣF , somma delle forze presenti [N], sono entrambe funzioni del tempo t [s].

Nelle ipotesi di rallentamento prima esposte, le forze presenti possono essere calcolate dalle equazioni [1] e [4], per cui la [5] diventa:

$$- \rho c_x S (v(t))^2 - k m v(t) = m a(t) \quad [6]$$

Nella equazione [6] i segni meno tengono conto che v e a sono di verso opposto. L'indicazione della dipendenza di v e a dal tempo, rappresentata nell'equazione [6], d'ora in avanti non sarà più espressa per brevità. L'accelerazione a è legata alla velocità dall'equazione differenziale $a = dv / dt$. Sostituendo nella [6] si ottiene:

$$- \rho c_x S v^2 - k m v = m \frac{dv}{dt} \quad [6']$$

L'equazione [6'] può essere integrata utilizzando il metodo della sostituzione. Il risultato dell'integrale definito, che parte dal tempo 0 (inizio del rallentamento) e dalla velocità v_0 ed arriva al tempo generico t è il seguente:

$$v = \frac{k m v_0}{(k m + v_0 \rho c_x S) e^{kt} - v_0 \rho c_x S} \quad [7]$$

In questa equazione e nelle successive e è la costante di Nepero, pari a circa 2.71. L'equazione [7] mostra che v è una funzione decrescente del tempo, il cui valore tende asintoticamente a zero. L'equazione [7] può anch'essa essere vista come una equazione differenziale, dal momento che $v = ds / dt$, dove s è lo spazio percorso s [m]. Per sostituzione si ottiene:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{k m v_0}{(k m + v_0 \rho c_x S) e^{kt} - v_0 \rho c_x S} \quad [7']$$

All'istante iniziale, in cui $v = v_0$, lo spazio percorso è nullo. Procedendo alla successiva integrazione, si ottiene l'equazione del moto cercata:

$$s = \frac{m}{\rho c_x S} \ln \left(1 + \frac{v_0 \rho c_x S}{k m} (1 - e^{-kt}) \right) \quad [8]$$

Notiamo che l'equazione è abbastanza complessa, pur nella semplicità delle ipotesi di partenza. Risulta interessante notare una dipendenza *prevalentemente* di diretta proporzione tra lo spazio percorso durante la prova e la massa dell'atleta ed una *prevalentemente* di proporzione inversa con i parametri della resistenza aerodinamica (c_x e S). Invece, il coefficiente d'attrito, come definito nell'equazione [4], si trova nell'esponentiale insieme al tempo, con il segno negativo, e a denominatore del termine sotto logaritmo.

L'equazione [8], portata al limite per $t \rightarrow$ infinito, dà uno spazio percorso pari a:

$$s_{inf} = \frac{m}{\rho c_x S} \ln \left(1 + \frac{v_0 \rho c_x S}{k m} \right) \quad [9]$$

Lo sviluppo teorico qui presentato, riassunto nell'equazione [8], mette in relazione i due parametri t e s , facilmente misurabili, con i coefficienti k e c_x , incogniti. Pertanto, si può progettare una serie di prove che consentano di stimare i parametri cercati. Tutto questo senza ricorrere a misure in galleria del vento.

Descrizione delle prove

I soggetti

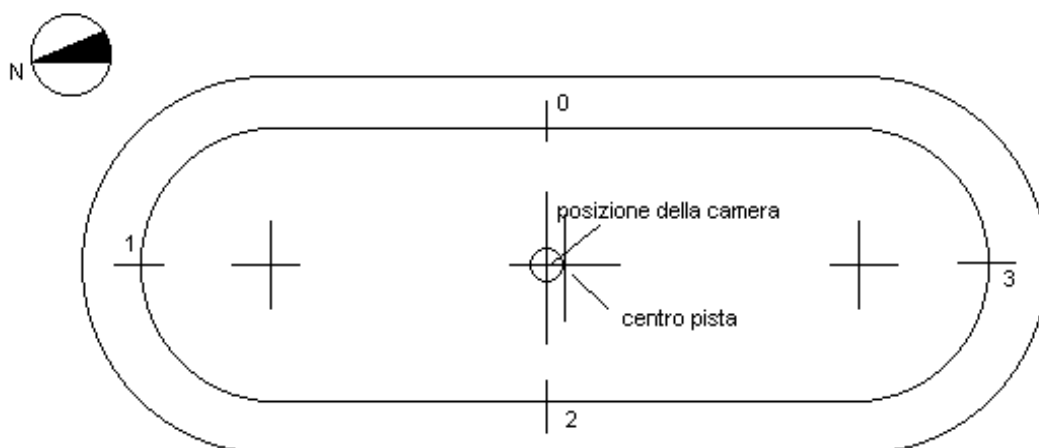
Per applicare il metodo sopra descritto è stata programmata una serie di prove. Le prove sono state effettuate in coincidenza di un raduno della Nazionale Italiana Assoluta, avendo a disposizione atleti maschi e femmine di alto livello internazionale, molti dei quali medagliati nei Campionati Assoluti Europei o Mondiali. L'età dei soggetti varia da 18 a 30 anni. Allo scopo di esplorare il campo delle misure di interesse, sono stati scelti 2 atleti maschi e 4 femmine aventi le stature minime e massime del gruppo.

Il percorso

Il pattinaggio a rotelle viene praticato su percorsi stradali e su piste a curve sopraelevate. Considerando che:

1. la pista presenta un fondo assai piu' regolare della strada, sia come caratteristiche della pavimentazione che per la costanza della quota;
2. la pista e' contornata da una balaustra chiusa ad altezza superiore ad 1 m da terra, cosi' da fare da schermo al vento si e' preferito svolgere le prove su pista. In particolare, e' stata utilizzata la pista di pattinaggio di Scaltenigo (VE), che ha le seguenti caratteristiche:
 1. Sviluppo alla corda 200.00 m.
 2. Pavimentazione in cemento levigato.

Il disegno mostra lo schema della pista e la posizione dei punti scelti per le misure. La precisione della misura e' dell'ordine del centimetro.



Tratto	sviluppo
0 - 1	46.77 m
1 - 2	46.77 m
2 - 3	53.23 m
3 - 0	53.23 m

Le prove

Le prove sono state fatte percorrendo esattamente lo sviluppo nominale della pista. Questo non succede in allenamento e in gara, dove gli atleti sfruttano la larghezza e la pendenza delle curve per tracciare la traiettoria piu' idonea alla velocita' e al tipo di gara; cosi' facendo percorrono *sempre* una distanza superiore a quella nominale, arrivando a percorrere anche 240 m / giro.

Gli atleti hanno effettuato tutti lo stesso tipo di prova, consistente in quanto segue:

1. Prendere velocita', in modo progressivo, fino a stabilizzarla; dovendo seguire la corda, ogni atleta ha scelto la velocita' in modo da non avere problemi di tenuta delle ruote in curva.
2. Percorrere a velocita' pressappoco costante il tratto di pista **1, 2, 3 e 0**.
3. Al passaggio sul punto **0** smettere di spingere, rimanendo in posizione di pattinaggio.
4. Continuare ad avanzare in atteggiamento passivo, senza spingere ne' frenare, passando di nuovo sui punti **1, 2 e 3**. A quest'ultimo passaggio la velocita' risultava gia' sufficientemente bassa per considerare conclusa la prova.

Ogni atleta, escluso uno, ha effettuato due prove successive, nelle quali ha usato due diversi tipi di ruote: piu' dure (durezza 85 Shore) e piu' morbide (durezza 81). Questo allo scopo di valutare l'influenza della scelta delle ruote.

Ogni prova e' stata registrata mediante una videocamera Hi-band 8 mm, dotata di contaframe. La camera e' stata posizionata come indicato in figura. I tempi di passaggio, sia nel tratto di spinta che in quello di rallentamento, sono stati misurati alla moviola utilizzando i frame. La precisione di misura della scala dei tempi e' di 0.04 s, sufficiente per gli scopi prefissati.

Per convenzione, il passaggio su di un punto di misura e' stato identificato con il passaggio della punta del piede piu' avanzato, cosi' come vuole il regolamento di gara. Questa scelta e' valida anche da un punto di vista biomeccanico, perche' sia in fase di spinta che durante uno scorrimento passivo l'atleta ha sempre l'arto anteriore in appoggio posizionato sotto il tronco, per cui la posizione della punta del piede piu' avanzato e' sostanzialmente indicativa della posizione del baricentro.

Per valutare la situazione atmosferica presente nel corso delle prove, che si sono svolte nell'arco di circa 3 ore, sono stati usati i dati meteorologici dell'aeroporto di Venezia Tesserà. La distanza tra l'aeroporto e la pista è inferiore a 15 Km, per cui si può tranquillamente ritenere che le misure siano applicabili. Per quanto riguarda il vento, le misure di Venezia sono sovrastimate rispetto alla pista, sia perché l'aeroporto è nelle immediate vicinanze del mare (campo aperto), mentre la pista è parzialmente "coperta" da alberi e sia perché la pista dispone di una recinzione chiusa.

Condizioni atmosferiche				
Venezia Tesserà				
17/05/97				
	vento			
ora	direz	vel	T	pressione
	gradi	nodi	° C	hPa
10.20	0	1	25	1016
10.50	0	2	25	1016
11.20	160	4	23	1016
11.50	160	5	23	1016
12.20	170	6	25	1016
12.50	170	6	25	1015
13.20	170	6	25	1015

Le prove si sono svolte tra le 11 e le 13. Il vento, in tale intervallo, è stato non superiore a 6 nodi, cioè circa 2 m/s. Non è possibile sapere l'effettiva intensità all'interno della pista, che comunque è inferiore a quest'ultimo valore. Pertanto, nel seguito si è trascurato l'effetto del vento. Ciò non è del tutto corretto e sicuramente produce un errore nel calcolo. In particolare, la resistenza aerodinamica risulta inferiore al vero nel tratto a favore di vento (direzione Nord) e superiore nel tratto controvento (direzione Sud).

Metodo di calcolo utilizzato

Con i dati raccolti come detto si è passati all'elaborazione numerica. L'unico fattore considerato costante in tutte le prove è:

ρ [Kg/m³] densità dell'aria = 1.20 Kg/m³
(determinata dai dati meteorologici)

I fattori costanti in ciascuna prova sono:

v_0 [m/s] velocità di ingresso, ottenuta per derivazione numerica dalla polinomiale di secondo grado s di t applicata ai punti **1, 2, 3 e 0** (fase di spinta)
S [m²] Superficie maestra del soggetto = **0.037 (m h)^{1/2}** (vedi relazione [10])
h [m] Statura del soggetto
m [Kg] Massa del soggetto

I dati disponibili per ogni prova sono:

t_1 [s] tempo di passaggio al punto 1, corrispondente a $s_1 = 46.77$ m
 t_2 [s] tempo di passaggio al punto 2, corrispondente a $s_2 = 93.54$ m
 t_3 [s] tempo di passaggio al punto 3, corrispondente a $s_3 = 146.77$ m

I fattori incogniti, ritenuti costanti per tutti i soggetti, sono:

c_x [-] coefficiente aerodinamico
k [1/s] coefficiente di attrito volvente medio generale
k₈₁ [1/s] coefficiente di attrito volvente medio per le prove con ruote da 81 Shore
k₈₅ [1/s] coefficiente di attrito volvente medio per le prove con ruote da 85 Shore. Per esperienza deve risultare **k₈₅ < k₈₁**

E' stato sviluppato un software di ricerca del minimo per funzioni di due variabili, basato sul metodo delle direzioni coniugate. La funzione da minimizzare scelta e' stata la somma degli errori quadratici:

$$E = \sum_{i,j} [s(c_x, k, t_{i,j}) - s_{i,j}]^2 = \min$$

Gli indici **i** e **j** rappresentano, rispettivamente, i punti di passaggio (1, 2 e 3) e le prove (da 1 a 11).

Alla prima elaborazione e' stato utilizzato l'intero insieme dei dati, avendo lo scopo di determinare i valori medi *generali* di **c_x** e **k**.

Il risultato dell'elaborazione e' stato il seguente :

c_x	= 0.549
k	= 0.0026 s ⁻¹
σ	= 2.39 m
n	= 33

in cui **σ** e' l'errore quadratico medio, definito come $\sigma = [E / (n - 1)]^{1/2}$ ed **n** il numero dei dati disponibili, pari al numero delle prove per il numero di punti di ciascuna prova. Notiamo che il valore di 2.39 m, confrontato con la misura **s₂** = 93.54 m, esprime un errore medio del modello matematico di circa il 2%, che e' pienamente accettabile. Si tratta ora di confrontare i valori calcolati di **k** e **c_x** con dati noti in condizioni simili, verificando cosi' sommariamente l'attendibilita' del metodo.

La costante **k**, cosi' come e' stata definita in questo lavoro, non e' immediatamente confrontabile con dati fisici noti. Pertanto, usando le equazioni da [3] a [4], ricaviamo da essa un valore di coefficiente di attrito volvente corrispondente ad una determinata velocita'. Ponendo che la velocita' media, per le attivita' di interesse, sia di 10 m/s (valore tipico di un'andatura di gara non portata all'estremo) e che il raggio delle ruote **r** da gara, come prima ricordato, e' di 0.041 m, si ricava che:

$$k_v = k v r / g = 0.00011 \quad [m]$$

Il valore di coefficiente di attrito radente dinamico cosi' calcolato va confrontato con dati di letteratura {4, pag 61}:

0.00015 Ruote di automobile su asfalto
0.0001 Ruote ferroviarie

L'ordine di grandezza e' perfettamente accettabile, anche se una misura *diretta* del valore di **k** sarebbe certamente preferibile al metodo indiretto qui proposto.

Per quanto riguarda **c_x**, si consideri che per un cilindro **c_x** = 0,65. Essendo i segmenti corporei, presi singolarmente, dei "cilindri a sezione ellittica", che offrono all'aria una sezione pseudo ovale (migliore di quella circolare ai fini dell'avanzamento), il valore trovato di 0.549 pare anch'esso accettabile.

Alla seconda elaborazione i due gruppi di dati misurati con ruote diverse sono stati distinti, ripetendo l'ottimizzazione con **c_x** mantenuto fisso al valore prima determinato. Dalla ottimizzazione del solo valore di **k** per ogni gruppo, si ottiene cosi':

Ruote 81

c_x = 0.549
k₈₁ = 0.0032 s⁻¹
σ = 2.35 m
n = 15

Ruote 85

c_x = 0.549
k₈₅ = 0.0021 s⁻¹
σ = 2.39 m
n = 18

Come atteso, il coefficiente d'attrito delle ruote piu' dure (Shore 85) e' inferiore a quello delle ruote tenere (Shore 81). Tuttavia, il confronto statistico tra le due popolazioni, effettuato con il test di Fisher, mostra che la piccola differenza riscontrata tra **k₈₁** e **k₈₅** e', almeno al 95%, dovuta al caso (o agli errori di misura). Pertanto, il metodo di misura utilizzato non si e' mostrato sufficientemente sensibile per discriminare le caratteristiche delle ruote; i valori ottenuti possono essere considerati validi solo *in senso semi-quantitativo*.

Riteniamo opportuno riepilogare le approssimazioni introdotte:

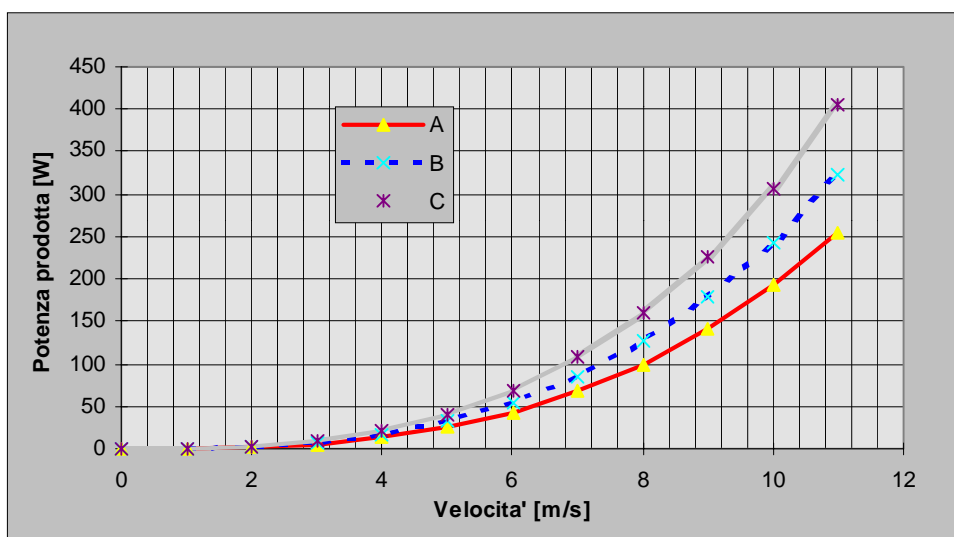
1. Costanza, per un certo atleta, della superficie maestra S , dipendente solo dai dati antropometrici del soggetto e non dalla postura.
2. Costanza, per tutti i soggetti, di c_x , indipendentemente dalla postura e dalle caratteristiche antropometriche.
3. Costanza, per tutti i soggetti, di k , indipendente da ogni altro fattore
4. Dipendenza dell'attrito volvente dalla velocità secondo proporzionalità diretta
5. Assenza di vento nelle prove

E' interessante notare che, pur con tutte le approssimazioni accettate, l'errore quadratico medio risulta accettabile.

Conseguenze pratiche sull'allenamento

I coefficienti calcolati con il metodo proposto permettono di costruire una curva velocità (v) - potenza meccanica dissipata dall'atleta (W) per vincere le resistenze passive. Il grafico seguente mostra la curva per tre diversi soggetti ipotetici, impegnati su pista al livello del mare in assenza di vento e in prove individuali (assenza di scia).

Soggetto	Statura	massa corporea
A	1.40 m	40 Kg
B	1.60	55
C	1.80	77

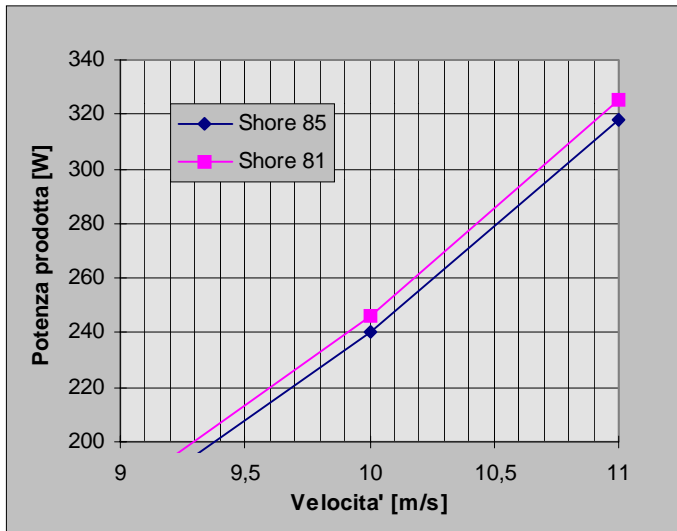


Il valore di potenza W tiene conto delle sole forze esterne (resistenza dell'aria e attrito volvente), per cui l'effettiva potenza che l'atleta deve impegnare e' superiore (attriti interni, ecc).

Supponiamo che le prove siano fatte su una pista da 200 m di sviluppo nominale, come quella di Scaltenigo usata per le misure. Supponiamo anche che la lunghezza *effettiva* del giro di pista sia circa 220 m, cioè il 10% in più, a causa delle traiettorie in curva; le variazioni di velocità dovute alla percorrenza in curva sono del tutto trascurabili. In queste condizioni la velocità di 8 m/s corrisponde ad un tempo sul giro di 27.5 s, mentre la velocità di 10 m/s corrisponde a 22 s/giro.

Prendendo a riferimento l'atleta B (1.60 m / 55 Kg, curva intermedia), fare una prova velocità costante di 8 m/s significa "spendere" 126 W, mentre farne un'altra a 10 m/s significa 243 W: in altre parole, abbassare il tempo da 27.5 a 22 significa **produrre circa il doppio della potenza**. Questo mostra come l'abituale espressione "compiere un esercizio all'80% della velocità massima" dia un'idea molto falsa sull'effettivo impegno energetico prodotto dall'atleta. Considerazioni analoghe possono essere fatte sugli altri soggetti ipotetici per i quali sono state disegnate le curve.

Un'altra serie di considerazioni può essere fatta in relazione alle ruote. Prendendo in esame i parametri relativi alle ruote con Shore 81 e 85, pur con le riserve prima espresse, si possono confrontare i grafici velocità / potenza dei due casi. Il grafico e' stato costruito per un atleta con 1.60 m / 55 Kg, come nel caso B del grafico precedente. La scala e' stata ingrandita per mostrare le differenze in modo più evidente. Naturalmente, si suppone che la scelta delle ruote non sia condizionata da altre esigenze; in altre parole, si fa l'ipotesi che l'atleta possa usare le ruote più dure senza limitazioni dovute alla tenuta in curva.



Se il nostro atleta, usando ruote 85, ha come prestazione di punta 10 m/s (potenza prodotta 240 W), passare a ruote 81 lo obbliga a rallentare a 9.9 m/s. In pratica, il suo tempo sul giro sale da 22 s a 22.2 s.

Conclusioni

E' stato proposto un metodo indiretto per il calcolo dei parametri c_x e k , che descrivono i fenomeni delle resistenze passive nel pattinaggio. Il metodo usa strumenti semplicissimi di misura (metro e cronometro o telecamera) e, pur con le limitazioni dovute alle approssimazioni introdotte, da' una descrizione piuttosto fedele del fenomeno.

Partendo dalle equazioni descritte nel testo, sono stati proposti dei grafici utilizzabili per valutare in modo semi-quantitativo le prestazioni degli atleti durante le prove.

In termini di applicazione dei risultati alla pratica di allenamento, si e' visto che, tra due prove svolte a velocita' di 8 e 10 m/s (incremento di velocita' del 25%), la potenza meccanica fornita dall'atleta sale da 126 a 243 W (incremento del 93%).

Bibliografia

- {1} Daniele Sette
Lezioni di Fisica - II ed.- vol. 1
Ed. Veschi - Roma - 1975
- {2} Resnick - Halliday
Fisica - III ed. vol. 1
C.E.Ambrosiana - Milano - 1990
- {3} Perry - Chilton
Chemical Engineers' Handbook - V ed.
McGraw-Hill - International Student Edition - Tokio - 1973
- {4} Brini - Rimondi - Veronesi
Problemi di fisica - IV ed. - vol. 1
Patron - Bologna - 1969

Ringraziamenti

Si ringrazia la Federazione Italiana Hockey e Pattinaggio per l'opportunita' offerta di partecipare al raduno e gli atleti che si sono messi a disposizione per le prove.

Si ringrazia il Servizio Meteorologico dell'Aeronautica Militare per i dati di condizione meteo su Venezia Tessera.

Appendice - Relazione tra statura corporea (h), massa corporea (m) e superficie maestra (S) nel pattinaggio a rotelle

Nella letteratura sportiva non sono disponibili dati o formule per il problema in esame. In effetti non e' possibile definire un valore di S costante, perche' la posizione dell'atleta cambia in continuazione nelle varie fasi del passo-spinta e del passo incociato. Tuttavia, in prima approssimazione, quello che si vuole determinare e' un valore *medio* che consenta di utilizzare la formula della resistenza aerodinamica.

Allo scopo di determinare una formula che esprima $S = S(h, m)$ sono state effettuate alcune fotografie ad atleti di categorie giovanili e atleti della squadra Nazionale Italiana assoluta 1997, sia maschi che femmine. Per ogni soggetto sono stati rilevati **h** e **m** e sono state fatte una o due foto da fermo in atteggiamenti che simulano la posizione di pattinaggio. Nel campo di vista della foto sono state riprese anche due bacchette lunghe esattamente 1 metro, una orizzontale e una verticale, poste sotto e accanto al soggetto. La foto e' scattata da lontano con l'uso di un obiettivo da 210 mm per ridurre gli errori di parallasse.

Le foto sono state elaborate al computer attraverso un software specificamente sviluppato, acquisendo i contorni delle figure con un digitizer Numonics con risoluzione 1/40 mm. Per proporzione con le misure delle due bacchette di riferimento sono state ottenute le misure delle superfici maestre dei soggetti.

La tabella mostra l'elenco dei dati disponibili

soggetto	h [m]	m [Kg]	S [m ²]
1	1,35	32	0,2637
2	1,39	45	0,2423
3	1,53	49	0,3416
4	1,60	70	0,3578
4	1,60	70	0,4219
5	1,62	53	0,3362
6	1,64	47	0,3631

soggetto	h [m]	m [Kg]	S [m ²]
7	1,64	59	0,3743
8	1,69	68	0,3788
9	1,70	76	0,4015
10	1,80	77	0,4175
10	1,80	77	0,4194
11	1,81	79	0,4778

Per prima cosa si rende necessario decidere quale tipo di equazione utilizzare. La superficie maestra cercata deve essere proporzionale dell'*altezza* del soggetto, parametro direttamente legato alla statura, e alla sua *larghezza*. Per valutare quest'ultima, supponiamo che il corpo sia costituito da un cilindro verticale (la cui altezza coincide con la statura); conoscendo la massa del soggetto, si conosce anche il *volume* del cilindro (a meno di una costante che e' la densita' del corpo); pertanto, la superficie della sezione del cilindro S_1 e' data da:

$$S_1 = \text{cost } m / h$$

Il diametro d di questo cerchio, che rappresenta la *larghezza* cercata, e' proporzionale alla radice quadrata della superficie S_1 :

$$d = \text{cost } (S_1)^{1/2} = \text{cost } (m / h)^{1/2}$$

Avendo ipotizzato che la superficie maestra S sia proporzionale al prodotto $d h$, si puo' scrivere la relazione conclusiva:

$$S = a (m / h)^{1/2} h = a (m h)^{1/2} \quad [10]$$

Qualitativamente, la relazione proposta esprime un valore di S crescente sia con la statura che con la massa, come e' ragionevole attendersi. Per ogni soggetto viene cosi' introdotto un *indice di superficie* i espresso da:

$$i = (m h)^{1/2}$$

La costante a e' stata calcolata dalla tabella dei dati disponibili, facendo la media tra i valori di a calcolati per ogni soggetto (per quei soggetti che offrivano piu' di un dato, nel calcolo e' stato considerato un solo valore di superficie pari alla media tra le disponibili).

Notiamo che, per lo stesso di soggetto e quindi a parita' di h e m , se l'atleta cambia la propria postura la superficie puo' variare di molto,. In particolare, per il soggetto n. 4 si vede che la superficie misurata va da 0.36 a 0.42 m² (differenza 16%).

Il valore di a risulta **0.037**. Il grafico seguente mostra il confronto tra i dati misurati e la curva di regressione. L'errore quadratico medio risulta pari a circa il 9%, che e' inferiore alla variazione prima notata nello stesso soggetto al variare della postura.

